IES "Isabel de España"
Departamento de Matemáticas
Las Palmas de Gran Canaria

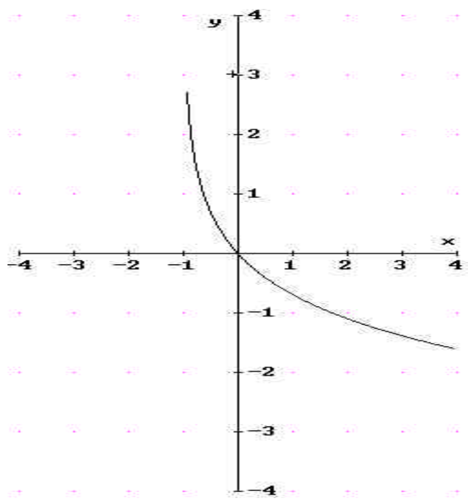
Resolución de los ejercicios del examen del día 11/11/99.

1. Calcula el dominio de definición de las siguientes funciones:

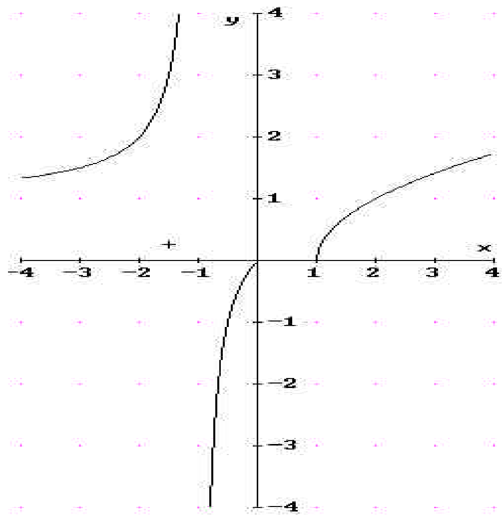
a) $f(x) = \ln \dfrac{1}{x+1}$ b) $f(x) = \begin{cases} +\sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) f(x) sólo existirá en el caso de que el argumento del logaritmo sea positivo estrictamente, por tanto: $\dfrac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow x+1 > 0$ pues $1 > 0$ siempre $\Rightarrow$ x > -1 $\Rightarrow$ domf(x) = $(-1,\infty)$.

b) Si x<0 f(x) está definida por la rama $\dfrac{x}{x+1}$ que está definida en todos los nº reales salvo en x=-1 que anula el denominador. Por tanto en esta zona sólo habría que prescindir del –1 en el dominio. Ahora bien si $x \geq 0$ la función está definida por $+\sqrt{x-1}$ que sólo estará definida para aquellos valores de x que hagan que el radicando de esta rama sea mayor o igual que 0. Esto ocurre cuando $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Por tanto el domf(x)=$(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup [1,\infty)$. Veamos la representación gráfica de estas funciones:



$f(x) = \ln \dfrac{1}{x+1}$



$f(x) = \begin{cases} +\sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. Calcula los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} x-\sqrt{x^2+x}$

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+\left(\sqrt{x+1}\right)^2+2\sqrt{(x+1)(x-1)}}{x+1-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1+x+1+2\sqrt{(x+1)(x-1)}}{2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+\sqrt{(x+1)(x-1)}}{2}=\infty+\infty=\infty$$

b) $$\lim_{x\to\infty}x-\sqrt{x^2+x}=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}=$$

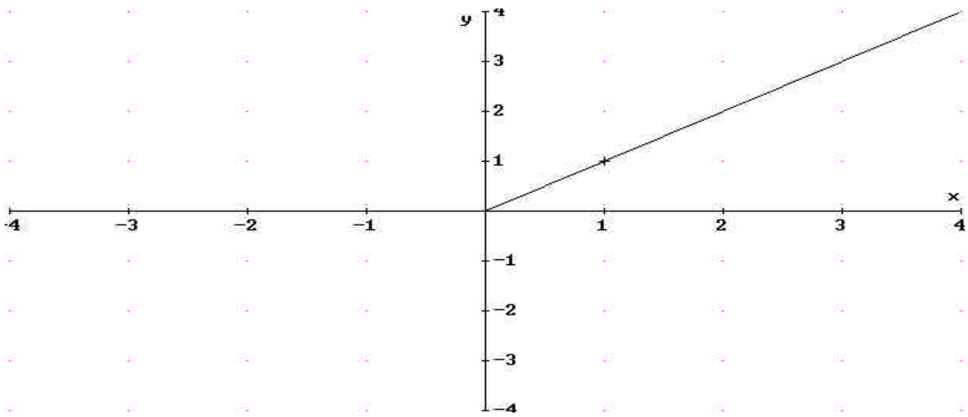
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{-1}{2}$$

3. Estudia la continuidad de la siguiente función: $f(x)=\frac{x+|x|}{2}$

$$f(x)=\frac{x+|x|}{2}=\begin{cases}\frac{x-x}{2}=0 \text{ si } x<0\\ \frac{x+x}{2}=x \text{ si } x\geq 0\end{cases}$$

Se observa que a la izquierda del 0 la función está definida por la función nula que es continua siempre. A la derecha del 0 la función está definida por x(función identidad) que también es continua siempre. Por tanto sólo nos falta estudiarla en el 0.

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}0=0$ $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}x=0$. Por tanto ambos límites laterales coinciden y $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. Además f(0)=0 Por tanto la función también es continua en el 0 y por tanto en todo R Veamos su representación gráfica.



4. Calcula a y b para que la siguiente función sea continua e indica su dominio:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x \text{ si } -p \leq \mathrm{x} \leq 0\\ a+x^2 \text{ si } 0<\mathrm{x}<1\\ \dfrac{b}{x} \text{ si } 1\leq \mathrm{x}\leq p\end{cases}$$

Cada una de las ramas que conforman la función son continuas en donde están definidas por tratarse de: función trigonométrica, función polinómica y función racional no anulándose el denominador en su intervalo de definición. Por tanto para que la función sea continua en todo su dominio que es el intervalo $[-p,p]$ tendrá que serlo también en los puntos 0 y 1.

Estudio de la continuidad en el 0.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} a+x^2=a$ Para que exista el límite deberá ocurrir entonces que a=1. Además f(0)=cos0=1. Por tanto si a=1 f(x) es continua en el 0. Estudiemos ahora la continuidad en x=1.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1+x^2=2$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{b}{x}=b$. Por tanto para que exista el límite de f(x) en x=1 deberá ser b=2. Además f(1)=b=2 y por tanto la función será continua .

5. Calcula, utilizando la definición, f'(x) para la función: $f(x)=x^2-4x+2$. Halla la ecuación de la recta tangente a la función anterior en el punto de abscisa x=1.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-4(x+h)+2-(x^2-4x+2)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2xh-4x-4h+2-x^2+4x-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh-4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x-4)}{h}=2x-4$$

Por tanto f¨(x)=2x-4

La recta tangente a la función f(x) tendrá por ecuación $y-y_0=m(x-x_0)$ siendo el punto $(x_0,y_0)=(1,-1)$ y la pendiente de dicha recta será la derivada de f(x) en el punto x=1.

$m=f'(1)=2\cdot 1-4=-2$.

Por tanto la ecuación pedida es $y+1=-2(x-1)$.