**IES "Isabel de España"**
**Departamento de Matemáticas**
**Las Palmas de Gran Canaria**

| **EXAMEN DE MATEMATICAS DE 2º BACH. (CC.NN.)** | Fecha: |
|---|---|
| NOMBRE: | Curso: |

1) Estudia el rango de la matriz siguiente según los valores de λ y calcula $A^{-1}$ para el menor valor entero positivo de λ que hace que exista.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & l & 5 \end{pmatrix}$$ (Selectividad, Junio del 96)

Sol.- $|A| = 2l = 0 \Leftrightarrow l = 0$

Por tanto, si $l \neq 0$ el rango de A será 3.

Si $l = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ rango(A)=2

$$l = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}; |A| = 2$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -10 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(Adj(A)\right)^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1/2 & 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2) Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2 & x & x & x \\ x & 2 & x & x \\ x & x & 2 & x \\ x & x & x & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(Selectividad, Septiembre del 99)}$$

Sol.-

$$\begin{vmatrix} 2 & x & x & x \\ x & 2 & x & x \\ x & x & 2 & x \\ x & x & x & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x+2 & x & x & x \\ 3x+2 & 2 & x & x \\ 3x+2 & x & 2 & x \\ 3x+2 & x & x & 2 \end{vmatrix} = (3x+2)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 2 & x & x \\ 1 & x & 2 & x \\ 1 & x & x & 2 \end{vmatrix} = (3x+2)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$(3x+2)(2-x)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2/3 \text{ raíz triple} \end{cases}$$

3) Discute según los valores de k el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo para el valor de k que lo hace compatible indeterminado, si lo hay:

$$\begin{cases} kx + y - z = k - 1 \\ x + 3y + z = 1 - k \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{(Selectividad, Septiembre del 99)}$$

Sol.- $A = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & k-1 \\ 1 & 3 & 1 & 1-k \\ 3 & 10 & 4 & 0 \end{array}\right)$ $|C| = 2k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

Por tanto: Si $k \neq 1 \Rightarrow$ r(C)=3=r(A)=nº de incógnitas (puesto que A no puede tener rango 4), S.C.D.(Solución única).

Si k=1 $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 0 \end{array}\right)$ Se observa que el sistema es homogéneo y por tanto es compatible ya que las matrices A y C tienen el mismo rango. Además, para este valor de k se anula el determinante de C, con lo cual el rango debe ser menor que 3.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ r(C)=r(A)=2<nº de inc.S.C. I. cuya solución es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = z \\ x + 3y = -z \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & 3 \end{vmatrix}}{2} = 2z,\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{2} = -z$$

Solución: (2z,-z,z). Obsérvese que la solución trivial (0,0,0) es una solución particular al ser un sistema homogéneo.

4) Resuelve la siguiente ecuación matricial AX-B=C, sabiendo que:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ (Selectividad, Septiembre del 96)

Sol.- $AX = C + B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C+B) \Rightarrow X = A^{-1}(C+B)$

$$C+B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix};\ |A| \quad 1 \Rightarrow A^{-} \ = \frac{1}{|A|}\left(Adj\ A)\right) \quad \begin{pmatrix} 0 & - \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

5) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento determinado por los puntos A(1,2,-1) y B(3,0,3) y:

   a. Es perpendicular a los vectores $\vec{u}(-2,3,0)$ y $\vec{v}(2,0,-1)$.
   b. Es perpendicular al plano XZ.

Sol.- $M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right) = (2,1,1)$

a) Perpendicular a los dos vectores será su producto vectorial:

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$$ Por tanto: $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-6}$

b) Vector perpendicular al plano XZ será el vector $\vec{j}(0,1,0)$. Por tanto:

$$\frac{x-2}{0} = y - 1 = \frac{z-1}{0}$$

**Nota .- Todas las preguntas valen dos puntos.**