



MATEMATICAS 3ª EVALUACION	FECHA:
NOMBRE:	CURSO:

1. Resuelve razonadamente la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ se obtiene: $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 13 & -3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$

2. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro k y resolverlo cuando sea posible:

$$\begin{cases} kx + 2z = 0 \\ ky - z = k \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Sol:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k & -1 & k \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Estudiemos el rango de la matriz de los coeficientes y de la

ampliada del sistema en función del parámetro k.

$$|C| = \begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = k^2 + k = k(k+1) \Rightarrow |C| = 0 \Leftrightarrow k = 0, -1$$

Por tanto si $k \neq 0$ y $-1 \Rightarrow r(C) = 3 = r(A) = n^\circ$ de incógnitas y por tanto el sistema será compatible determinado, con solución única, que es (por Cramer):

$$x = \frac{-4}{k+1}; y = \frac{2}{k+1} + 1; z = \frac{2k}{k+1}$$

Veamos ahora que ocurre si $k=0$.

$$|C| = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Rightarrow r(C) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ se observa que la 1ª y 2ª filas son múltiplos, por lo tanto,}$$

para calcular el rango de A podemos suprimir cualquiera de las dos

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto el $r(C) = r(A) = 2 < n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) cuya solución es:

$$x = 5 - 3y; z = 0 \quad (5 - 3y, y, 0)$$

Si $k = -1$:

$$\text{En este caso el } r(C) = 2 \text{ pues } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right| = 1 \neq 0$$

$$\text{Ahora } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

Ahora los rangos de las matrices C y A son distintos, por lo tanto en este caso el sistema es incompatible y no tiene solución.

3. Calcula el o los valores de t para que la siguiente matriz tenga inversa y calcúlala cuando $t=1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol:

Dicha matriz tendrá inversa cuando su determinante sea no nulo, por tanto tendremos que calcular dicho determinante y comprobar para qué valores de t se anula y para cuáles no.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & t \end{vmatrix} = t(t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 0, 2.$$

Por tanto dicha matriz será inversible si $t \neq 0, 2$.

Calculemos dicha inversa en el caso en que $t=1$. En este caso ya sabemos que tendrá inversa pues su determinante es -1 . (Basta sustituir en *)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores de a, b y c siendo éstos números reales cualesquiera.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Sol:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \text{ ya que es un determinante de Vandermonde. Por}$$

tanto dicho determinante será no nulo sólo en el caso en que a, b y c tomen valores distintos y en este caso el rango de dicha matriz será 3.

En el caso en que a, b y c tomen el mismo valor, las tres columnas de la matriz serán iguales y por tanto el rango de la matriz será 1. En cualquier otro caso el rango de la matriz será dos.

5. Determina la ecuación de la recta paralela a $r: \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ que pasa por el punto $A(1, -2, 1)$. Exprésala en todas sus formas e indica cual es su vector de dirección.

Sol:

$$r: \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z + 4 \\ x - y = -2z \end{cases} \Rightarrow 3x = 4 - z \Rightarrow x = \frac{4 - z}{3}$$

$$y = x + 2z = \frac{4 - z}{3} + 2z = \frac{5z + 4}{3} \Rightarrow \left(\frac{4 - z}{3}, \frac{5z + 4}{3}, z \right)$$

Por tanto podemos expresar la recta r anterior en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}z \\ y = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 1 \right) \text{ y multiplicando por 3: } \vec{v}(-1, 5, 3)$$

Puesto que las rectas han de ser paralelas han de tener la misma dirección y por tanto podremos usar el vector anteriormente hallado como la dirección de la recta pedida:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{3} \quad (\text{forma general})$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5} \Rightarrow 5x + y - 3 = 0 \\ \frac{x-1}{-1} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow 3x + z - 4 = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{forma implícita})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - I \\ y = -2 + 5I \\ z = 1 + 3I \end{array} \right. \quad (\text{forma paramétrica})$$

$$(x, y, z) = (1, -2, 1) + (-1, 5, 3)I \quad (\text{forma vectorial})$$

El vector de dirección de dicha recta es el anteriormente reseñado.

Nota.- Todas las preguntas valen 2 puntos.