IES "Isabel de España"
Departamento de Matemáticas
Las Palmas de Gran Canaria

EXAMEN DE MATEMATICAS DE 2º BACHILLERATO (CC.NN.)	FECHA:
NOMBRE:	CURSO:

1) Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\le 0 \\ 1-x^2 & \text{si } 0<x\le 1 \\ x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Sol: Cada rama de la función es continua y derivable en donde está definida por tratarse de funciones continuas y derivables en todo su dominio (exponencial y polinómica). Donde puede existir discontinuidad es en los puntos x=0 y x=1.
Estudio de la continuidad en x=0.

$f(0)=e^0=1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^x=1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 1-x^2=1$. Por tanto se cumple: $\lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$ y la función es continua en x=0.

Continuidad en x=1.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 1-x^2=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x-1=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$$ y la función también es continua en x=1. Consecuentemente la función es continua en todo R.

Estudio de la derivabilidad en el punto x=0.

$$f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ -2x & \text{si } 0<x<1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

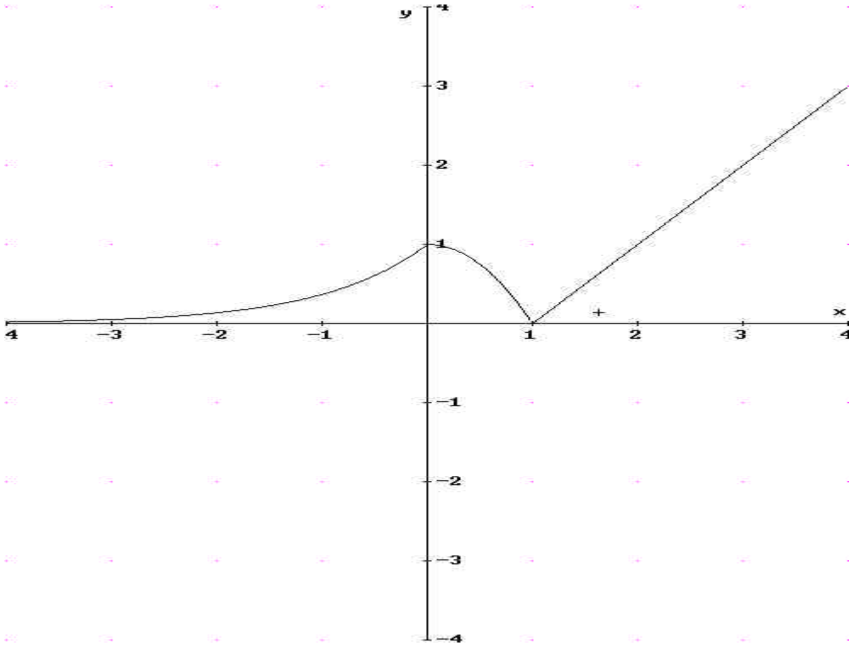
$$\left.\begin{array}{l} f'(0)^-=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=1 \\ f'(0)^+=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} -2x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$ No existe $f'(0)$ y por tanto f(x) no es derivable en x=0.

Derivabilidad en x=1.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)^- = \lim\limits_{x\to1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to1^-} -2x = -2 \\ f'(1)^+ = \lim\limits_{x\to1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to1^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ No existe $f'(1)$ y por tanto f(x) no es derivable en x=1.

Consecuentemente f(x) es derivable en : $R-\{0,1\}$

La gráfica de la función esw la siguiente:



2) Calcula los valores de a y b para que la función siguiente sea derivable en todo R y calcula $f'(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} \text{ax}^2+\text{bx - 1} & \text{si} \quad \text{x} \le 1 \\ 2bx-2 & \text{si} \quad \text{x} > 1 \end{cases}$$

Sol: Cada rama de la función es continua y derivable en sus intervalos de definición por tratarse de funciones polinómicas. Por tanto tendremos que imponer las condiciones de continuidad y derivabilidad en x=1.

Continuidad en x=1.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=a+b-1 \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} ax^2+bx-1 = a+b-1 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} 2bx-2 = 2b-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b-1=2b-2$$ (I) para que f(x) sea continua en x=1. Impongamos ahora la condición de derivabilidad en dicho punto.

$$f'(x)=\begin{cases} \text{2ax + b} & \text{si} \quad \text{x} < 1 \\ 2b & \text{si} \quad \text{x} > 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)^- = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2ax+b = 2a+b \\ f'(1)^+ = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2b \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+b=2b$$

(II) para que f(x) sea derivable en x=1.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (I) y (II) se obtienen los valores a=1 y b=2.

3) Calcula la ecuación de la recta tangente y normal a la curva de ecuación $y - \ln x = 0$ en el punto de abscisa 1.

Sol:

$$\left.\begin{array}{l} y = \ln x \\ y(1) = \ln 1 = 0 \\ y'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y'(1) = 1 = m \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y - 0 = 1(x-1) : tangente \\ y - 0 = -1(x-1) : normal \quad \text{donde } \mathrm{m}' = \dfrac{-1}{\mathrm{m}} = -1 \end{array}\right.$$

4) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica si es posible:

a) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $y = e^{\ln \operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen}^2 x \qquad y' = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$

También $y' = 2\cot gx \cdot e^{\ln \operatorname{sen}^2 x}$

5) Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \dfrac{-1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\cos x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \dfrac{1-\cos 1}{\left(e-1\right)^2}$

Nota.- Todas las preguntas valen lo mismo.