



<b>EXAMEN DE MATEMATICAS DE 2º BACHILLERATO (CC.NN.)</b>	FECHA:
NOMBRE:	CURSO:

1) Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**S/** Si  $x \neq 0$  la función es continua y derivable por tratarse del producto de dos funciones continuas y derivables en todo su dominio. Estudiemos el caso en que  $x=0$ .

**CONTINUIDAD.**

$f(0)=1$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$  por tratarse de una función que tiende a cero por otra que está acotada entre  $-1$  y  $1$ . El límite lateral por la derecha es exactamente igual, puesto que al aproximarnos tanto por la izquierda como por la derecha al cero lo hacemos a través de la misma rama de la función. Por tanto:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$ . Consecuentemente la función no es continua en  $x=0$  (discontinua evitable) y por tanto tampoco puede ser derivable en dicho punto.

2) Calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que la función siguiente sea derivable en todo  $\mathbb{R}$  y calcula  $f'(x)$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**S/** Estudiemos su continuidad. Si  $x \neq 0$  la función es continua por tratarse de funciones polinómicas que son continuas siempre. Veamos qué pasa en  $x=0$ .  $f(0)=0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + b = b$$

Por tanto para que la función sea continua en este punto deberá ser:  $b=0$ .

Veamos ahora su derivabilidad.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Esta función es derivable en todo  $x \neq 0$  por tratarse de una función polinómica y una función constante. Veamos que ocurre en  $x=0$ .

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 - 1 = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} a = a$$

Por tanto para que la función sea continua y derivable en  $x=0$  se tendrán que cumplir simultáneamente la ecuaciones:  $b=0$ ;  $a=-1$ . Sólo en este caso la función será continua y derivable en  $x=0$  y por tanto en todo  $\mathbb{R}$ . En este caso:

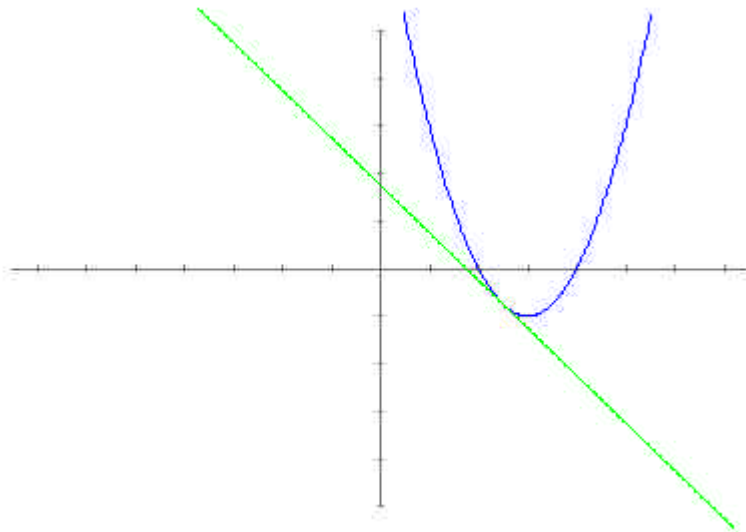
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3) Calcula el punto de la gráfica de la función  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  en que la tangente en dicho punto es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes. Haz una representación gráfica y calcula dicha recta tangente.

S/ La pendiente de dicha recta tangente en el punto  $x$  (que buscamos) nos la dará:  $m = f'(x) = 2x - 6$ . Ahora bien, si es paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante, dicha pendiente deberá ser  $-1$ , puesto que dicha bisectriz forma un ángulo de  $135^\circ$  con el eje de abscisas y su tangente vale  $-1$ . Por tanto  $m = 2x - 6 = -1 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ . Por último basta

sustituir este valor en la función para calcular su imagen y así el punto pedido.  $\left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{4}\right)$ .

La recta tangente pedida será:  $y + \frac{3}{4} = -1\left(x - \frac{5}{2}\right)$



4) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica si es posible:

$$a) \quad y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}} \cdot \frac{\cos x(1 - \operatorname{sen} x) + \cos x(1 + \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} = \frac{(1 - \operatorname{sen} x)}{2(1 + \operatorname{sen} x)} \frac{2 \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2} =$$

$$\frac{\cos x}{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x$$

$$b) \quad y = (\cos x)^{\ln x^2}$$

$$\ln y = \ln[(\cos x)^{\ln x^2}] = \ln x^2 \ln(\cos x); \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} 2x \ln(\cos x) + \ln x^2 \frac{1}{\cos x} (-\sin x)$$

$$y' = (\cos x)^{\ln x^2} \left( \frac{2 \ln(\cos x)}{x} - \operatorname{tg} x \ln x^2 \right)$$

5) Calcula el valor de los siguientes límites:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin x} = \infty^0 = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln \frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln \frac{1}{x} = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \frac{-1}{x^2}}{-\cot gx \cdot \cos ecx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{-x \cdot \cot agx \cdot \cos ecx} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x \cdot \cos ecx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x \frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right] = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \right) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x \ln x + x - 1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln x + x \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln x + 2} = \frac{-1}{2}$$