



EXAMEN FINAL 2º BACH. (CC.NN.)	FECHA:
NOMBRE:	CURSO:

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:  $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$

Sol.-  $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  Estudiemos primero su continuidad.

Deberemos hacer el estudio en los puntos  $x=-1$  y  $x=0$ , puesto que en el resto de puntos la función está definida por el cociente de dos funciones continuas siendo por tanto continua.

$x=-1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x}{x+1} = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x). \text{ Por tanto en } x=-1 \text{ hay una}$$

discontinuidad de salto infinito. Por otra parte tampoco existe  $f(-1)$ .

$x=0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Por tanto la función es continua en todo  $\mathbb{R}$  salvo en  $x=-1$  donde presenta una discontinuidad de salto infinito.

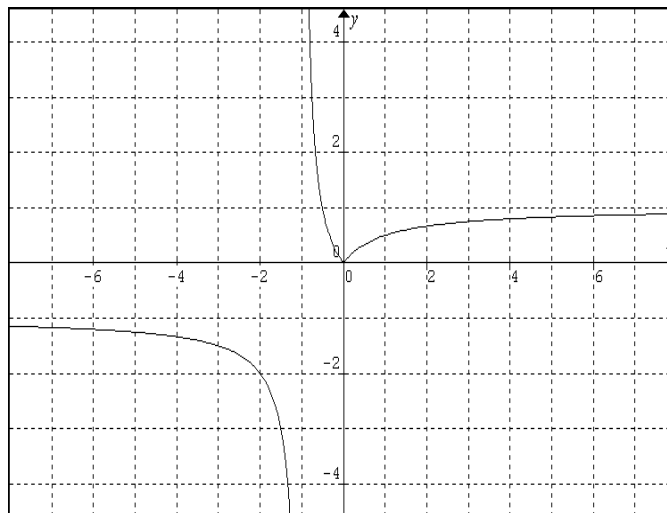
Estudiemos ahora su derivabilidad. Por tratarse de un cociente de funciones derivables dicha función será derivable salvo en el punto  $x=-1$ , donde al no ser continua tampoco será derivable y en  $x=0$  donde procederemos a estudiarla.

$x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{(x+1)^2} = -1 \\ f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)^2} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{No existe } f'(0)$$

Por tanto la función es derivable en todo  $\mathbb{R}$  salvo en  $x=-1$  y en  $x=0$ .



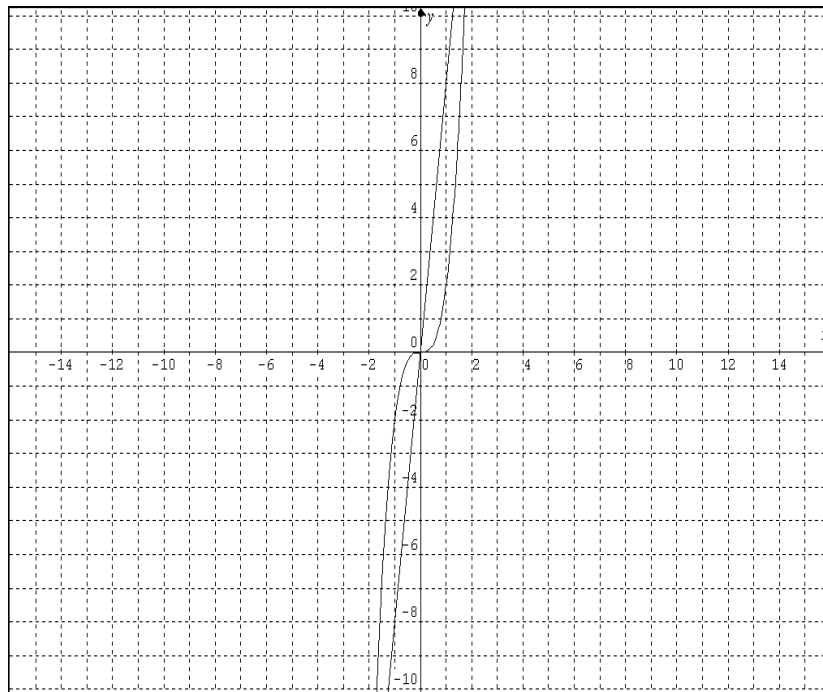
2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \ln \sqrt{\operatorname{sen} x}$       b)  $f(x) = x^{\operatorname{tg} 2x}$

Sol.- a)  $f'(x) = \frac{\cot gx}{2}$       b)  $f'(x) = x^{\operatorname{tg} 2x} \left[ 2 \sec^2(2x) \ln x + \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} \right]$

3. Sea  $f(x) = 2x^3$ . Calcula el punto en el que la recta tangente a la curva en dicho punto es paralela a la cuerda que une los puntos  $(-2,-16)$  y  $(2,16)$ . Interpreta el resultado dibujando aproximadamente la función en el  $(-3,3)$ .

Sol.-



La cuerda que une los puntos  $(-2,-16)$  y  $(2,16)$  tiene por pendiente:  $m = \frac{16+16}{2+2} = 8$  y

por tanto la ecuación de dicha cuerda es:  $y + 16 = 8(x + 2)$

El punto que se nos pide es aquel en el que la recta tangente a la curva en dicho punto es paralela a la cuerda representada y como dicha cuerda tiene de pendiente 8

deberá ocurrir:  $f'(x) = m = 8 \Rightarrow 6x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$ . Estos valores de x están

comprendidos en el intervalo  $(-2,2)$  lo que quiere decir que existen dos puntos que

cumplen esta condición. Dichos puntos son:  $\left( \pm \sqrt{\frac{4}{3}}, -2 \left( \sqrt{\frac{4}{3}} \right)^3 \right)$ .

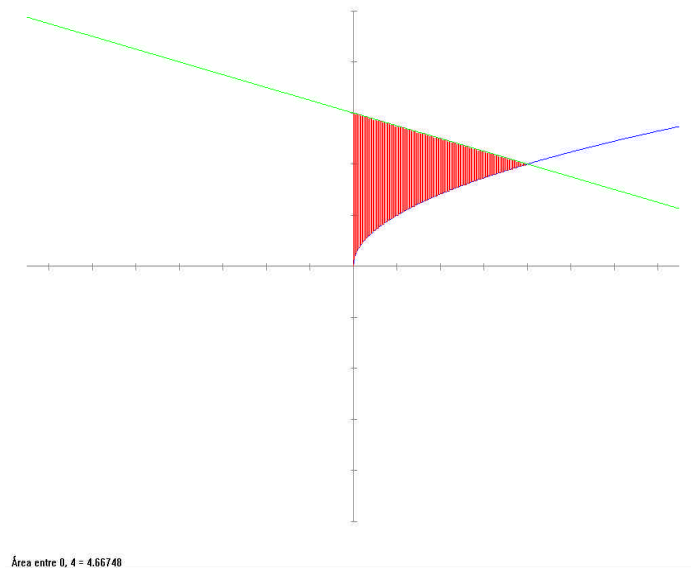
Puede observarse en la gráfica que pueden dibujarse dos rectas tangentes a la función con la condición de ser paralela a la cuerda representada.

4. Calcula:  $\int 4x \arctg(1+x^2) dx$

Sol.-  $\int 4x \arctg(1+x^2) dx = 2(1+x^2) \arctg(1+x^2) - \ln(x^4 + 2x^2 + 2) + k$

5. Calcula la superficie limitada por las funciones:  $y^2 = x$  ;  $4y + x = 12$  y el eje de ordenadas.

Sol.-



Deberemos calcular el punto en el que se cortan dichas funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{12-x}{4} \Rightarrow (4\sqrt{x})^2 = (12-x)^2 \Rightarrow 16x = 144 - 24x + x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - 40x + 144 = 0 \Rightarrow x_1 = 4; x_2 = 36$$

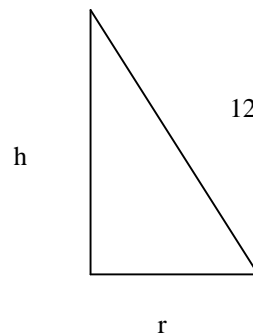
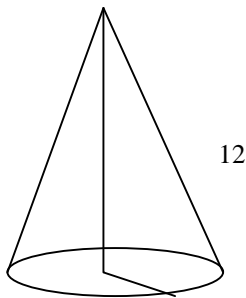
La segunda solución no nos vale puesto que es el corte de la recta con la parte negativa de la función  $f(x)$  (no dibujada) por tomarse sólo la positiva.

Por tanto la superficie pedida es:  $S = \int_0^4 \frac{12-x}{4} - \sqrt{x} dx = \frac{64}{5}$

6. Calcula las dimensiones del cono cuya generatriz es constante e igual a 12 m. si su volumen ha de ser máximo. Recuerda que el volumen del cono viene dado por:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Sol.-



$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ h^2 + r^2 = 12^2 \Rightarrow r^2 = 144 - h^2 \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi h (144 - h^2) = \frac{1}{3} \pi (144h - h^3)$$

$$V' = \frac{1}{3} \pi (144 - 3h^2) = 0 \Rightarrow 3h^2 = 144 \Rightarrow h = \sqrt{48} m. \Rightarrow r = \sqrt{96} m.$$

$$V'' = -2\pi h \Rightarrow V''(\sqrt{48}) < 0 \Rightarrow \text{Volumen máximo.}$$

7. Calcula utilizando las propiedades de los determinantes:  $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$ .

$$\text{Sol.-} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x+2 \\ x & x & x+4 \\ x & x & x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & x+2 \\ x & 3 & x+4 \\ x & 5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & 3 & x \\ x & 5 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ puesto que la segunda y tercera filas son proporcionales}$$

8. Estudia el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro  $k$  y

$$\text{resuélvelo cuando sea compatible: } \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

Sol.-

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array} \right) \quad |C| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ k+2 & k & 1 \\ k+2 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} =$$

$$(k+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-2 \end{cases}$$

Por tanto si  $k \neq 1, -2 \Rightarrow |C| \neq 0 \quad r(C)=r(A)=3=n^\circ \text{ de incógnitas} \quad \text{S.C.D. (Sol. Única)}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix}}{(k+2)(k-1)^2} = \frac{1}{k+2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(k+2)(k-1)^2} = \frac{1}{k+2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(k+2)(k-1)^2} = \frac{1}{k+2}$$

$$\text{Solución: } \left( \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2} \right)$$

Si  $k=1$  el sistema se reduce a la ecuación  $x+y+z=1$  Por tanto el sistema es compatible indeterminado cuya solución es  $x=1-y-z \quad (1-y-z, y, z)$

Obsérvese que el rango de A y C es igual a 1 y quedan 2 variables libres.

Si  $k=-2$

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right); |C| = 0; \left| \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Rightarrow r(C) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right| = 9 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

9. Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo

a las rectas:  $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-8}{4}$  y  $s \equiv x = y = z$ .

Sol.-

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \left\{ \begin{array}{l} A(3,7,8) \\ \vec{u}(2,3,4) \end{array} \right\} \\ s \equiv \left\{ \begin{array}{l} B(0,0,0) \\ \vec{v}(1,1,1) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{p} \equiv \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = x - 2y + z = 0$$

10. Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,0,1) y por el punto de

intersección de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = -4+t \end{cases}$  con el plano  $\mathbf{p} \equiv x + y + z = 0$

Sol.- Primero tendremos que determinar el punto B en el que la recta y el plano se

$$\text{cortan: } 1+t+2-t-4+t=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1+1 = 2 \\ y = 2-1 = 1 \\ z = -4+1 = -3 \end{cases}$$

Por tanto el punto B es (2,1,-3)  $\vec{v} = \vec{AB}(1,1,-4) \Rightarrow s \equiv x-1 = y = \frac{z-1}{-4}$

**Nota.- Todas las preguntas valen lo mismo.**